UDC 006.91:053.088

Study of approaches to determining the required number of multiple observations

I. Zakharov [1,2], O. Botsiura [2], P. Neyezhmakov [1]

[1] National Scientific Centre "Institute of Metrology", Mironositska Str., 42, 61002, Kharkiv, Ukraine
pavel.neyezhmakov@gmail.com
[2] Kharkiv National University of Radio Electronics, Nauka Ave., 14, 61166, Kharkiv, Ukraine
newzip@ukr.net

Abstract

The necessity to determine the minimum number of observations when developing a measurement procedure in accredited test and calibration laboratories is discussed. The methods of evaluating the number of observations when evaluating the expanded measurement uncertainty using the GUM method, the Monte Carlo method, and based on the Law of the expanded uncertainty propagation are considered. In the first case, a nomogram is constructed that allows determining the minimum required number of multiple observations based on the given values of the expanded measurement uncertainty for a probability of 0.9545, the standard deviation of the scattering of the indications of a measuring instrument and the normally propagated standard instrumental uncertainty of type B. In the case of calculating the measurement uncertainty based on the Monte-Carlo method, a normal law and the Student's law of propagation with given characteristics was modelled, and on its basis, for a probability of 0.95, a diagram to calculate the required number of observations when performing multiple measurements was constructed. The application of the Law of the expanded uncertainty propagation proved to be the most universal for calculating the required number of observations, since it made it possible to obtain approximating expressions for both probabilities and for the normal and uniform laws attributed to the components of type B.

Keywords: number of multiple observations; measurement uncertainty evaluation; GUM uncertainty framework; Monte Carlo method; Law of expanded uncertainty propagation (LEUP).

Received: 22.08.2022 Edited: 23.09.2022 Approved for publication: 28.09.2022

Introduction

"The methods developed and modified by the laboratory" may be applied at testing and calibration laboratories accredited for compliance with the requirements of the ISO 17025:2017 [1] based on 7.2.1.4 of this standard. When developing a procedure for performing measurements during tests or calibrations, one of the most important issues is the choice of the minimum required number of measurements that provide, on the one hand, a given expanded measurement uncertainty, and, on the other hand, minimum laboriousness of performing them. It is generally accepted that the number of multiple measurements should be at least ten. This postulate is based on document [2], in the Notice to 3.2.2, which states that "If the number n of repeated observations is less than 10, then the reliability of the value of the standard uncertainty of measurement, which is estimated according to method A ... must be taken into account". In fact, when performing multiple measurements, there is often no variability in the indications of a measuring instrument (for example, when calibrating a calliper with a gauge block, there is no point in performing multiple measurements at all).

The purpose of this paper is to study the issue of determining the minimum required number of observations based on the known characteristics of the observed scattering of indications and type B uncertainty.

1. Basic algorithm of measurement uncertainty evaluation [3]

In this case, which is the most common in practice, the expanded measurement uncertainty $U(y)$ will be equal to:

$$U(y) = t_p(\nu_{eff}) \cdot u_c(y), \tag{1}$$

where $u_c(y)$ is the combined standard uncertainty; $t_p(\nu_{eff})$ is the Student's coefficient for the level of confidence p; ν_{eff} is the effective number of degrees of freedom determined for the case of direct multiple measurements by the formula:

$$\nu_{eff} = (n-1)\left[1+\frac{u_B^2(y)}{u_A^2(y)}\right]^2. \tag{2}$$

Because the

$$u_c(y) = \sqrt{u_A^2(y)+u_B^2(y)}, \tag{3}$$

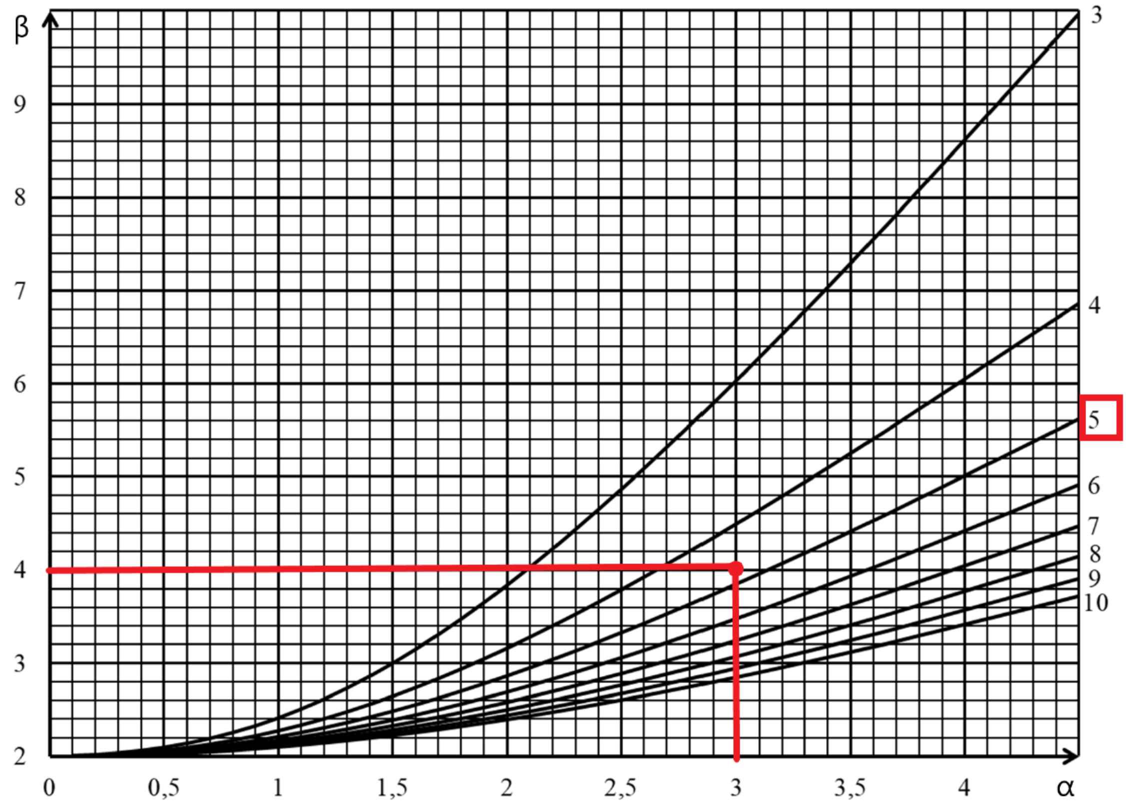

Fig. 1. Dependence $\beta=\varphi(n,\alpha)$ obtained by GUM uncertainty framework

then expressing $u_A(y)$ as $u_A(y)=s/\sqrt{n}$, where s is the standard deviation of the indications determined previously by numerous observations ($n>10$), and $s/u_B(y)=\alpha$, we obtain an expression for the expanded uncertainty in the form:

$$U(y)=t_p\left\{(n-1)\left[1+\frac{n}{\alpha^2}\right]^2\right\}u_B(y)\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n}}. \qquad (4)$$

Thus, with known $u_B(y)$ and given $U(y)$, we obtain the dependence

$$\beta=\frac{U(y)}{u_B(y)}=t_p\left\{(n-1)\left[1+\frac{n}{\alpha^2}\right]^2\right\}\cdot\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n}}, \qquad (5)$$

which, for a coverage probability of 0.9545, is shown in Fig. 1.

The argument of the Student's coefficient in expression (5) can be non-integer. Therefore, to calculate the values of the Student's coefficient for the coverage probability of 0.9545, the formula obtained by interpolating the tabular values of the Student's coefficient was used:

$$t_{0.9575}(\nu)=\frac{2}{1-\frac{1.3}{\nu}+\frac{0.361}{\nu^2}}. \qquad (6)$$

Interpolation error of (6) does not exceed ±0.36% for $n\geq 3$.

Using dependence $\beta=\varphi(n,\alpha)$, it is possible to obtain the required number of observations for a given value of $U(y)$ and known values of $u_B(y)$ and s. For this, in Fig. 1, it is necessary to find a point of intersection of the lines drawn perpendicular to the axes from the given values of β and α and to take the required number of observation results, which is equal to n, corresponding to the underlying curve, which is closest to the point. For example, the intersection point of the perpendiculars for $\beta=4$ and $\alpha=3$ will correspond to $n=5$.

2. Monte Carlo method [4]

In this case, the measurement framework will look like:

$$Y=\delta+\varepsilon, \qquad (7)$$

where δ is the correction for the instrumental error of the measuring instrument, which has a normal or uniform distribution law with zero mathematical expectation and a single standard deviation; ε is the correction for a random measurement error having a t-distribution with zero mathematical expectation, the number of degrees of freedom $\nu=n-1$, and a standard deviation obtained by:

$$s_t=s\sqrt{\frac{n-1}{n(n-3)}}. \qquad (8)$$

The change of α was carried out in the range from 0.01 to 5. Using the NIST Uncertainty Machine program [5], for the given parameters α, n and $u_B=1$, the value of the expanded uncertainty U was determined for the confidence levels of 0.95, and then the value of β was determined. The dependences $\beta=\varphi(n,\alpha)$ are shown in Fig. 2.

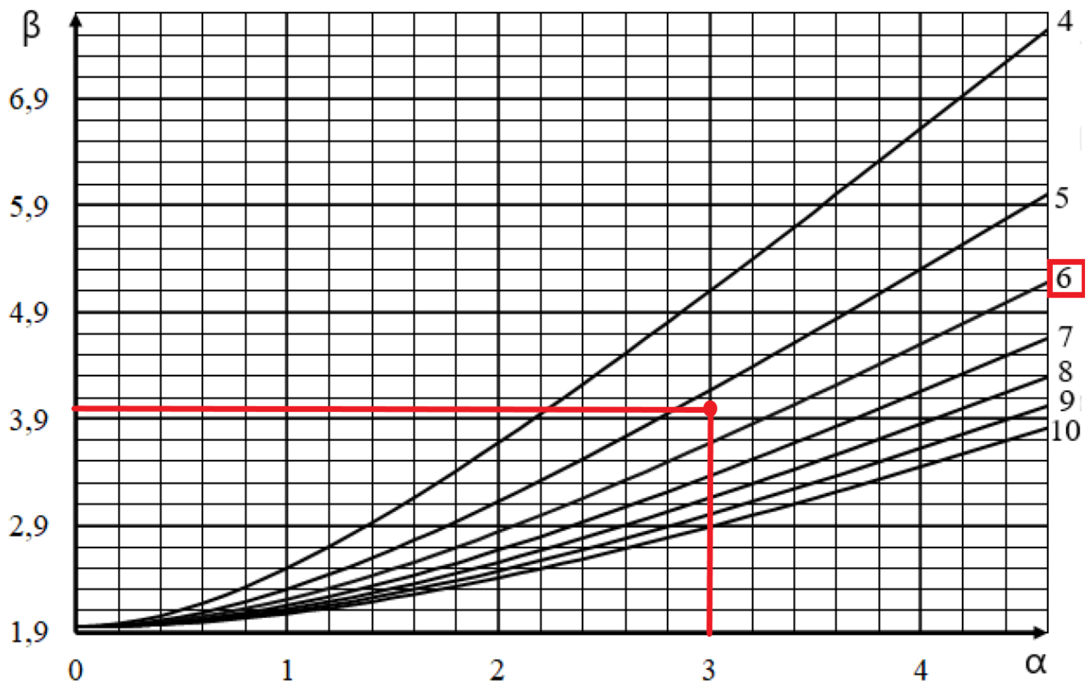

Fig. 2. Dependence $\beta = \varphi(n, \alpha)$ obtained by MCM

The algorithm for determining the required number of measurements is similar to that described in paragraph 1.

3. The Law of Expanded Uncertainty Propagation (LEUP)

A good approximation of the results obtained by the Monte Carlo method is the LEUP [6]. The bias of the values of the expanded uncertainty obtained by the LEUP from the values obtained by the MCM do not exceed 4.5%. For the measurement framework (4), in this most common case, the expanded measurement uncertainty will be equal to:

$$U(y) = \sqrt{U_A^2 + U_B^2}, \tag{9}$$

where U_A, U_B are the expanded uncertainties of type A and B, respectively, which are determined by the formulas:

$$U_A = t_p(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}, \tag{10}$$

$$U_B = k_p u_B. \tag{11}$$

In formula (10), $t_p(n-1)$ is the Student's coefficient for confidence level p and the number of degrees of freedom $n-1$. In formula (11), k_p is the coverage factor for the normal or uniform distribution laws for confidence level p.

With this in mind, expression (6) can be rewritten as:

$$\beta = \frac{U(y)}{u_B(y)} = \sqrt{t_p^2(n-1)\frac{\alpha^2}{n} + k_p^2}. \tag{12}$$

From here, one can obtain:

$$\frac{\sqrt{n}}{t_p(n-1)} = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2 - k_p^2}} = \gamma. \tag{13}$$

For confidence level $p=0.9545$, the dependence $n(\gamma)$ is well approximated by the expression (the approximation error at the point $n=3$ is 2.85%, and for $n>3$, it is no more than 1.5%):

$$n = 4\gamma^2 + 2.5. \tag{14}$$

For confidence level $p=0.95$, the dependence $n(\gamma)$ is well approximated by the expression (the approximation error at point a, for $n \geqslant 3$, is not more than ±1.4%):

$$n = 3.9\gamma^2 + 2.4. \tag{15}$$

If β=4 and α=3 and normal distribution attribute to instrumental uncertainty type B, for $p=0.9545$ we get $k_p=2.0$, $\gamma=0.866$ and $n=5.5$; and for $p=0.95$ we get $k_p=1.96$; $\gamma=0.86$ and $n=5.3$.

Conclusion

When developing testing or calibration measurement procedures, one of the most important issues is the choice of the minimum required number of multiple observations n. The solution to the issue will depend on the method used for the measurement uncertainty evaluation. The report presents options for calculating n for the cases of applying the GUM uncertainty framework [3], the Monte Carlo method (MCM) [4], and the Law of the expanded uncertainty propagation (LEUP) [6].

Using [3] and [4], the nomograms, which allows determining n based on the given values of the expanded measurement uncertainty, the standard deviation of the observed scattering of indications, and the standard instrumental uncertainty of type B, were obtained.

Using the LEUP [6], which allows getting a good approximation of the results obtained by the MCM, the formulas, that allow determining n depending on the known characteristics of the observed scattering of indications and the standard instrumental uncertainty of type B for the confidence levels of 0.95 and 0.9545, were obtained.

The received results were compared, and the recommendations about their application are given.

Дослідження підходів до визначення необхідної кількості багаторазових спостережень

І.П. Захаров [1,2], О.А. Боцюра [2], П.І. Неєжмаков [1]

[1] Національний науковий центр "Інститут метрології", вул. Мироносицька, 42, 61002, Харків, Україна
pavel.neyezhmakov@gmail.com
[2] Харківський національний університет радіоелектроніки, просп. Науки, 14, 61166, Харків, Україна
newzip@ukr.net

Анотація

Обговорюється необхідність визначення мінімальної кількості спостережень під час розробки методики вимірювань в акредитованих за вимогами стандарту ISO/IEC 17025:2017 лабораторіях. Вихідними даними для обчислення є цільова розширена невизначеність, стандартна інструментальна невизначеність засобу вимірювання та оцінка стандартного відхилення розкиду його показань. Розглянуто способи оцінки числа спостережень при оцінюванні розширеної невизначеності за методикою "Керівництва з оцінювання невизначеності вимірювань" (GUM), методом Монте-Карло (ММК) та при використанні запропонованого авторами Закону розповсюдження розширеної невизначеності (ЗРРН), який дозволяє отримувати оцінки невизначеності вимірювань, близькі до оцінок, що отримують за допомогою ММК. У першому випадку (GUM) побудовано номограму, що дозволяє визначити мінімально необхідну кількість багаторазових спостережень на основі співвідношень заданих значень розширеної невизначеності вимірювання для ймовірності 0,9545 та оцінки стандартного відхилення розкиду показань засобу вимірювання до його стандартної інструментальної невизначеності. У випадку розрахування невизначеності вимірювань на основі ММК було запропоновано математичну модель обчислень, за допомогою програми NIST Uncertainty Machine здійснено моделювання нормального закону, який приписується інструментальній невизначеності типу В, та закону розповсюдження Стьюдента, який приписується невизначеності типу А, і на його основі для ймовірності 0,95 побудовано діаграму для розрахунку необхідної кількості спостережень при виконанні багаторазових вимірювань. Застосування ЗРРН виявилось найбільш універсальним для розрахунку необхідної кількості спостережень, оскільки дозволило отримати апроксимуючі вирази для ймовірностей 0,95 і 0,9545 та для нормального й рівномірного законів, що приписуються інструментальній невизначеності засобу вимірювання.

Ключові слова: кількість багаторазових спостережень; оцінка невизначеності вимірювання; модель невизначеності GUM; метод Монте-Карло; закон поширення розширеної невизначеності.

Исследование подходов к определению необходимого количества многократных наблюдений

И.П. Захаров [1,2], О.А. Боцюра [2], П.И. Неежмаков [1]

[1] Национальный научный центр "Институт метрологии", ул. Мироносицкая, 42, 61002, Харьков, Украина
pavel.neyezhmakov@gmail.com
[2] Харьковский национальный университет радиоэлектроники, 61166, просп. Науки, 14, Харьков, Украина
newzip@ukr.net

Аннотация

Обсуждается необходимость определения минимального количества наблюдений при разработке методики измерений в аккредитованных испытательных и калибровочных лабораториях. Рассмотрены способы оценки числа наблюдений при оценке расширенной неопределенности по методике GUM, методу Монте-Карло и на основе Закона распространения расширенной неопределенности. В первом случае построена номограмма, позволяющая определить минимально необходимое количество многократных наблюдений на основе заданных значений расширенной неопределенности измерений для вероятности 0,9545, стандартного отклонения разброса показаний измерительного прибора и нормально распределенной стандартной инструментальной неопределенности типа B. В случае расчета неопределенности измерений на основе метода Монте-Карло было произведено моделирование нормального закона и закона распространения Стьюдента с заданными характеристиками и на его основе для вероятности 0,95 построена диаграмма для расчета необходимого количества наблюдений при выполнении многократных измерений. Применение Закона распространения расширенной неопределенности оказалось наиболее универсальным для расчета необходимого количества наблюдений, поскольку позволило получить аппроксимирующие выражения для обоих значений вероятности, а также для нормального и равномерного законов, приписываемых компонентам типа B.

Ключевые слова: количество многократных наблюдений; оценка неопределенности измерения; модель неопределенности GUM; метод Монте-Карло; закон распространения расширенной неопределенности.

References

1. ISO/IEC 17025:2017. General requirements for the competence of testing and calibration laboratories, 2017. 30p.
2. EA-4/02 M:2013. Evaluation of the uncertainty of measurement in calibration.
3. JCGM 100:2008. Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement. JCGM, 2008. 134 p.
4. JCGM 101:2008. Evaluation of measurement data — Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” — Propagation of distributions using a Monte Carlo method. JCGM, 2008. 90 p.
5. The NIST Uncertainty Machine. Available at: https://uncertainty.nist.gov
6. Zakharov I.P., Botsyura O.A. Estimation of expanded uncertainty in measurement when implementing a Bayesian approach. *Measurement Techniques*, 2018, vol. 61(4), pp. 342–346. doi: 10.1007/s11018-018-1431-4