ДОДАТОК Д

до методичних вказівок з курсової роботи з дисципліни:

«Основи метрології та вимірювальних технологій»

«Ідентифікація неполіноміальної калібрувальної залежності з урахуванням інструментальних невизначеностей вимірювальних приладів»

Автор – Семеніхін В.С., аспірант кафедри ІВТ

Відгук вимірювального приладу (ВП) вимірюється в N точках калібрування розглянутого діапазону $X_1, X_2, ..., X_N$ для побудови калібрувальної залежності ВП. У кожній X_j точці калібрування проводять вимірювання показань ВП Y_{ji} (i = 1, 2, ..., n) і повторюють їх n разів. За результатами вимірювань будують калібрувальну залежність і проводять її апроксимацію математичною залежністю. Знаходження параметрів (ідентифікація) залежності найчастіше виконується методом найменших квадратів (МНК), який забезпечує найкращі результати, коли апроксимаційна залежність є поліномом.

У метрологічній практиці часто доводиться мати справу з випадком, коли збільшення ступеня полінома в розумних межах не призводить до істотного зменшення похибки апроксимації при виявленні нелінійної калібрувальної залежності. У цьому випадку відбувається перетворення вихідної залежності

$$Y = f(X, A, B) \tag{1}$$

в межах лінійної залежності

$$y = a + bx \tag{2}$$

шляхом заміни змінних [1]:

$$x = \Phi(X); \tag{3}$$

$$y = \Psi(Y). \tag{4}$$

застосовується.

Вирази (1) для нелінійних функцій, зведених до лінійних, наведено в першому стовпці таблиці 1, у другому стовпці якої містяться вирази (3), (4) для функцій.

Оцінки $\hat{a}, \hat{b}$ параметрів лінеаризованої залежності в подальшому знаходять за допомогою МНК. При оцінці невизначеності калібрувальної залежності (1) слід враховувати невизначеність значень вихідного сигналу u_Y ВП. Значення оцінюються як за типом A (через випадкові похибки ВП), так і за типом В (через інструментальні похибки вимірювань під час калібрування, а також невизначеність у визначенні значень (оцінених за типом B) u_X точок калібрування). Слід враховувати, що оскільки значення Y і X вимірюються безпосередньо за допомогою ВП, інструментальні невизначеності u_Y і u_X повинні бути перераховані в інструментальні невизначеності u_y і u_y та при виявленні лінеаризованої залежності (3.27) так само, як:

$$u_x = \frac{\partial \Phi(X)}{\partial X} u_X = c_X u_X ; \tag{5}$$

$$u_y = \frac{\partial \Psi(Y)}{\partial Y} u_Y = c_Y u_Y . \tag{6}$$

Вирази для коефіцієнтів чутливості c_X і c_Y для різних початкових залежностей (1) наведені в п’ятому стовпці табл. Д1.

Після виявлення лінійної залежності необхідно здійснити її обернене перетворення у вихідну, за яким необхідно буде розрахувати невизначеність знаходження значення X для будь якої величини Y. Значення коефіцієнтів $\hat{A}$ і $\hat{B}$ перераховані з отриманих коефіцієнтів наведені в таблиці Д1. Вирази для коефіцієнтів чутливості $c_x = \frac{\partial X}{\partial x}$, що зв’язують невизначеності u_X і u_x для різних початкових залежностей (1), наведені у п’ятому стовпці таблиці Д1. Вирази для коефіцієнтів чутливості, що зв’язують невизначеності,

$$u_X = c_x u_x \tag{7}$$

наведені в останньому стовпчику таблиці 3.5.

Загальна лінійна залежність має вигляд:

$$y = a_0 + b(x - \overline{x}). \tag{8}$$

Використання залежності (8) замість (2) усуває кореляцію між оцінками $\hat{a}_0$ і $\hat{b}$. Алгоритм оцінки невизначеності вимірювання для залежності буде складатися з наступних пунктів.

1) Відповідно до експерементальних точок $\overline{Y}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_{ji}$, залежність

$$\overline{Y}_j = f(X_j), \tag{9}$$

будують на графіку, який апроксимують однією з функцій $Y = f(X, A, B)$ першого стовпця таблиці Д1.

2) Вихідну залежність (0) лінеаризуємо за допомогою виразів $x = \Phi(X)$ і $y = \Psi(Y)$ з другого стовпця таблиці Д1.

3) Оцінки коефіцієнтів лінеаризованої залежності (3.27) a і b обчислюються за допомогою виразів:

$$\hat{b} = \sum_{j=1}^{N} \overline{y}_j (x_j - \overline{x}) \Big/ \sum_{j=1}^{N} (x_j - \overline{x})^2 . \tag{10}$$

$$\hat{a} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \overline{y}_j - \frac{\hat{b}}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j = \frac{1}{Nn}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} y_{ji} - \hat{b}\overline{x} ; \tag{11}$$

де

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j ; \tag{12}$$

$$\overline{y}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_{ij} . \tag{13}$$

4) Відповідно до отриманих значень $\hat{a}$ і $\hat{b}$, значення коефіцієнтів $\hat{A}$ і $\hat{B}$ розраховуються, використовуючи формули з третього стовпця таблиці Д1, отримуючи модель вихідної залежності $Y = f(X, \hat{A}, \hat{B})$.

Оцінка невизначеності вимірювань за ідентифікованою залежністю:

1) Для заданого значення Y, значення X розраховується за відповідною формулою $X = f^{-1}(Y, \hat{A}, \hat{B})$ з четвертого стовпця таблиці Д1.

2) Невизначеність знаходження значення x розраховується за формулами:

$$u_{LSM}(x) = \sqrt{\left[\frac{1}{N} + (x-\overline{x})^2 \Big/ \sum_{j=1}^{N}(x_j-\overline{x})^2\right] \cdot \left[u^2(\overline{y}) + b^2 u_B^2(x)\right]}, \tag{14}$$

якщо x_j, $j = 1,...,N$ не співвідносяться ($\mathrm{cov}(x_j, x_k) = 0$ для будь-якого $j, k = 1,...,N$ якщо $j \neq k$).

Якщо значення x_j, $j = 1,...,N$ є корельованими (посиленими тією самою постійною похибкою) стандартною невизначеністю $u_{LSM}(x)$ обчислюється так:

$$u_{LSM}(x) = \sqrt{\left[\frac{1}{N} + (x-\overline{x})^2 \Big/ \sum_{j=1}^{N}(x_j-\overline{x})^2\right] \cdot u^2(\overline{y}) + b^2 u_B^2(x)} \ . \tag{15}$$

У цьому випадку значення $u(\overline{y})$ знаходяться за формулою:

$$u(\overline{y}) = \sqrt{u_A^2(\overline{y}) + u_B^2(\overline{y})}, \tag{16}$$

де

$$u_B(\overline{y}) = c_Y u_B(Y); \tag{17}$$

$$u_B(x) = c_X u_B(X); \tag{18}$$

$$u_A(\overline{y}) = \sqrt{\frac{1}{(Nn-2)n}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}(y_{ji} - \hat{a} - \hat{b}x_j)^2}, \tag{3.44}$$

Крім того, коефіцієнти чутливості c_X і c_Y розраховуються за формулами п'ятого стовпця табл. Д1.

3) Невизначеність $u_{LSM}(x)$ перераховується в невизначеність $u_{LSM}(X)$ за формулою (7), використовуючи значення коефіцієнтів чутливості c_x з останнього стовпця таблиці Д1.

Таблиця 1

Основні вирази для реалізації методу заміни змінної

$Y = f(X, A, B)$	$x = \Phi(X)$ $y = \Psi(Y)$	$\hat{A}$, $\hat{B}$	$X = f^{-1}(Y, \hat{A}, \hat{B})$	c_X ; c_Y	c_x
$Y = Ae^{BX}$	$x = X$ $y = \ln Y$	$\hat{A} = e^{\hat{a}}$ $\hat{B} = \hat{b}$	$X = \dfrac{\ln Y - \ln \hat{A}}{\hat{B}}$	$c_X = 1$ $c_Y = 1/Y$	$c_x = 1$
$Y = AX^B$	$x = \ln(X)$ $y = \ln(Y)$	$\hat{A} = e^{\hat{a}}$ $\hat{B} = \hat{b}$	$X = \exp\left(\dfrac{\ln Y - \ln \hat{A}}{\hat{B}}\right)$	$c_X = 1/X$ $c_Y = 1/Y$	$c_x = e^x$
$Y = A + B\ln(X)$	$x = \ln(X)$ $y = Y$	$\hat{A} = \hat{a}$ $\hat{B} = \hat{b}$	$X = \exp\left(\dfrac{Y - \hat{A}}{\hat{B}}\right)$	$c_X = 1/X$ $c_Y = 1$	$c_x = e^x$
$Y = A + \dfrac{B}{X}$	$x = 1/X$ $y = Y$	$\hat{A} = \hat{a}$ $\hat{B} = \hat{b}$	$X = \dfrac{\hat{B}}{Y - \hat{A}}$	$c_X = -1/X^2$ $c_Y = 1$	$c_x = -1/x^2$
$Y = \dfrac{1}{A + BX}$	$x = X$ $y = 1/Y$	$\hat{A} = \hat{a}$ $\hat{B} = \hat{b}$	$X = \dfrac{1/Y - \hat{A}}{\hat{B}}$	$c_X = 1$ $c_Y = -1/Y^2$	$c_x = 1$
$Y = \dfrac{X}{A + BX}$	$x = 1/X$ $y = 1/Y$	$\hat{A} = \hat{b}$ $\hat{B} = \hat{a}$	$X = \dfrac{\hat{A}Y}{1 - \hat{B}Y}$	$c_X = -1/X^2$ $c_Y = -1/Y^2$	$c_x = -1/x^2$